

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

| | |
|----------------------------|--|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Римановы поверхности |
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 4 |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 12.02.2024

Аннотация

Данный курс посвящён следующим темам: классическая дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовых пространствах, гладкие векторные расслоения и связности в них, риманова геометрия многообразий и их подмногообразий, конструкция Чженя-Вейля характеристических классов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- студент должен освоить основные понятия, и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

Задачи дисциплины

- решать задачи римановой геометрии;
- владеть математическим аппаратом римановой геометрии.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|--|
| УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде | УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.) |
| | УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи |
| ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач | ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности |
| | ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности |
| | ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности |
| | ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации |
| ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре | ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок |
| | ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников |
| | ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |

| | |
|---|--|
| новые научные результаты | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |
| | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия, и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

уметь:

- решать задачи римановой геометрии.

владеть:

- математическим аппаратом римановой геометрии.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|--|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Кривые в плоскости и в пространстве | 6 | 6 | | 15 |
| 2 | Векторные расслоения | 6 | 6 | | 15 |
| 3 | Римановы многообразия | 6 | 6 | | 15 |
| 4 | Подмногообразия римановых многообразий | 6 | 6 | | 15 |
| 5 | Расслоения и их когомологии | 6 | 6 | | 15 |
| Итого часов | | 30 | 30 | | 75 |
| Подготовка к экзамену | | 0 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 135 час., 3 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Кривые в плоскости и в пространстве

Кривизна, кручение, репер Френе. Поверхности в трехмерном пространстве. Первая и вторая квадратичные формы. Главные кривизны, средняя и гауссова кривизна. Нормаль средней кривизны. Формула Эйлера для кривизны нормального сечения. Поверхности в n -мерном евклидовом пространстве. Первая и вторая квадратичные формы. Связности в касательном и нормальном расслоениях к поверхности. Вторая квадратичная форма и оператор Вейнгартена. Деривационные уравнения Гаусса-Вейнгартена. Теорема Гаусса-Бонне для поверхностей.

2. Векторные расслоения

Склеивающие коциклы. Структурная группа. Евклидовы и эрмитовы расслоения. Естественные операции с расслоениями. Ориентируемые расслоения. Связности в векторных расслоениях. Локальное задание связности: локальная форма связности, символы Кристоффеля. Кривизна. Связности в евклидовых и эрмитовых расслоениях. Связности, согласованные с метрикой и их кривизна. Связности в главных расслоениях.

3. Римановы многообразия

Кручение, кривизна. Связность Леви-Чивиты. Симметрии тензора кривизны. Тензор Риччи. Скалярная кривизна. Римановы многообразия II. Геодезические. Геодезические координаты. Лагранжево описание геодезических. Вторая вариация.

4. Подмногообразия римановых многообразий

Первая и вторая квадратичные формы. Оператор Лапласа-Бельтрами на римановых многообразиях. Характеристические классы. Конструкция Чженя-Вейля характеристических классов. Классы Чженя, Понтрягина и Эйлера и их свойства. Характер Чженя и его свойства.

5. Расслоения и их когомологии

Класс Тома. Конструкция класса Тома по Матаи-Квиллену. Связь класса Тома и класса Эйлера. Теорема Гаусса-Бонне.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, М., Физматлит, 2004

Дополнительная литература

1. Алгебраическая топология с геометрической точки зрения [Текст] / А. Б. Скопенков - М. МЦНМО, 2015

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://dm.fizteh.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

| | |
|----------------------------|--|
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | <u>4</u> |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Д.Г. Ильинский, канд. экон. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|--|
| УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде | УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.) |
| | УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи |
| ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач | ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности |
| | ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности |
| | ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности |
| | ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации |
| ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре | ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок |
| | ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников |
| | ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
| | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели |
| | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |
| | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Римановы поверхности» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия, и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.

уметь:

- решать задачи римановой геометрии.

владеть:

- математическим аппаратом римановой геометрии.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Найти кривизну и кручение кривой $r(t) = e^t(\sin t, \cos t, 1)$.
2. Найти связность в касательном расслоении, вторую квадратичную форму и оператор Вейнгартена для прямого кругового цилиндра в R^3 .
3. Приведите пример двух нетривиальных векторных расслоений, таких что их прямая сумма — тривиальное расслоение.
4. Опишите киллинговы векторные поля на сфере со стандартной метрикой.
5. Построить биинвариантную метрику на группе Ли $U(n)$.
6. Написать параметрическое уравнение тора вращения и найти индуцированную метрику, то есть первую квадратичную форму.
7. Доказать, что если две поверхности в R^3 пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают (в такой ситуации говорят, что поверхности пересекаются трансверсально), то эта кривая является прямой.
8. Докажите, что в геодезических координатах, центрированных в точке p , символы Кристоффеля в точке p обращаются в ноль (в других точках, в общем-то, это неверно).
9. Геодезическая полнота. Теорема Хопфа-Ринова о геодезической полноте.
10. Приложения римановой геометрии в физике и других областях науки.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.